Mathématiques. A propos des vecteurs

Notion d'intervalle

Il faut bien comprendre la notion de longueur d'un intervalle :
Si on vous demande la durée d'un repas commencé à 20h10 et terminé à 20h50,
c'est : $\Delta = 50 - 10 = 40$ mn ou mieux : $\Delta = 20$ h 50 min – (20 h 10 mn) = 0 h 40 mn.
S'il s'agit maintenant d'un repas pris entre 8 h moins 10 et 8 h 30, sa durée est
$\Delta = 0$ h + 30 mn – (–10 mn) c-à-d 30 + 10 mn = 40 mn, car il ne faut pas oublier la règle des signes :
$- \times - = +$ (les ennemis de nos ennemis sont nos amis !)

**La longueur d'un segment ou d'une durée est égale
à la cote (ou à l'heure) de son extrémité moins celle de son début.**

Vecteur

Un vecteur est un objet à 2 dimensions
(c'est même, plus généralement, un objet à 3 dimensions, mais pas dans notre étude.)
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par 2 points, son extrémité B et son origine A.
Dans un plan Oxy, ces points sont définis par 2 coordonnées : x_B , y_B , x_A , y_A
On donne les positions de ces points ainsi : A (x_A , y_A) et B (x_B , y_B)
Exemple, ici, fig. de droite : A (–20, –10), B (20, 20)

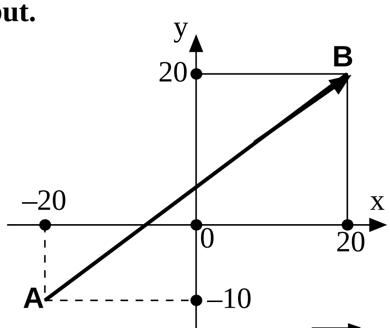

Fig. 1. Vecteur $\overrightarrow{AB}$

Longueurs

On dit aussi qu'un vecteur possède 2 *composantes* : ce sont ses *projections* sur les axes.
La *projection* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe x a pour longueur $x_B - x_A$ (40 dans la fig 1).
La *projection* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe y a pour longueur $y_B - y_A$ (30 dans la fig 1).
La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$, appelée aussi sa *norme,* s'obtient par le théorème de Pythagore.
Elle est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses 2 composantes.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Si le vecteur est parallèlle à l'un des axes Ox ou Oy, il possède une composante nulle
et sa longueur est égale à celle de l'autre composante.

Dans le cas général, on dispose d'un repère Oxy avec des vecteurs élémentaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Les vecteurs élémentaires sont des vecteurs de longueur 1 parallèles aux axes. On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i}\,(x_B - x_A) + \vec{j}\,(y_B - y_A)$$

$\vec{i}\,(x_B - x_A)$ et $\vec{j}\,(y_B - y_A)$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Dans la figure, $(x_B - x_A) = 20 - (-20) = 40$ et $(y_B - y_A) = 20 - (-10) = 30$.
d'où $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2$

Addition de vecteurs

1. Graphiquement. On place le 2e vecteur $\vec{V}$ à l'extrémité du premier vecteur $\vec{U}$.
Leur **somme** $\vec{S}$ est le vecteur qui relie le point initial de $\vec{U}$ au point terminal de $\vec{V}$ déplacé.

2. Algébriquement. Les composantes du vecteur somme sont égales à la somme des composantes des 2 vecteurs : $x_S = x_U + x_V$; $x_S = x_U + x_V$ (Attention aux signes !)

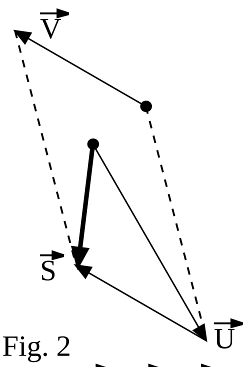

Fig. 2
Addition $\vec{S} = \vec{U} + \vec{V}$

Produit scalaire

Le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un *scalaire*, c'est-à-dire un nombre pur et non un vecteur.
Il se note en général U.V et est égal à la somme des produits des composantes :

$$U.V = U_x.V_x + U_y V_y$$

Il est aussi égal au produit de la longueur d'un des 2 vecteurs par la projection de l'autre sur le premier.

$$U.V = \|\vec{U}\| \,.\, proj_{\text{sur } U}(\vec{V}) = \|\vec{U}\| \,.\, \|\vec{V}\| \cos\theta$$

si θ est l'angle entre les 2 vecteurs.

On peut calculer l'angle θ entre 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ grâce à la relation suivante :

$$\cos\theta = \frac{U.V}{\|\vec{U}\| \,.\, \|\vec{V}\|}$$

Cas particuliers :
1. Le produit scalaire de 2 vecteurs perpendicuaires est nul, puisque cosθ est alors nul.
2. Si un vecteur est parallèle à un axe, sa composante sur l'autre axe est nulle et l'un des 2 termes du produit U.V est nul ; le calcul du produit scalaire est simplifié.

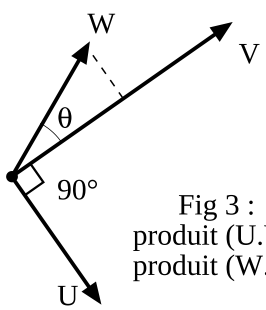

Fig 3 :
produit (U.V) = 0
produit (W.V) ≠ 0

Notes : 1. Si on travaillait en 3 dimensions, les vecteurs auraient 3 composantes et le repère comporterait en plus un axe Oz.
2. Il existe un autre type de produit entre vecteurs, le produit vectoriel, très utile en physique, mais pas étudié ici.